UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Métodos de Elementos Finitos Mixtos en Elasticidad (525440).

Noviembre 18, 2005 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\, \mathrm{tr}\, \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ puede re-escribirse como $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla\,\mathbf{u} - \gamma \quad \text{en} \quad \Omega$, donde $\gamma := \frac{1}{2}(\nabla\,\mathbf{u} - (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio

$$\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0 \,\}\,.$$

Recuerde que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \gamma)) &= \quad 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (v, \eta)) &= \; -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot v\, dx \quad \forall\, (v, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) := \int_\Omega v \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) \in H \times Q\,.$$

Extienda el método utilizado en el problema 17 del listado para deducir un **estimador de error a-posteriori** del esquema de Galerkin asociado a (1).

2. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura en el problema 20 del listado). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente problema de transmisión: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{gathered} -\Delta u_1 = f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 = g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Recuerde que la formulación variacional mixta del problema (2) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div};\Omega_1) \times H(\mathrm{div};\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \, \mathrm{div} \tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} = & \quad F(\boldsymbol{\tau}) \,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \, \mathrm{div} \sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} = & \quad G(\mathbf{v}, \lambda) \,, \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div};\Omega_1) \times H(\mathrm{div};\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} \, + \, \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{y} \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := - \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx \,.$$

Considere el análisis y los resultados del paper adjunto (I. Babuška and G.N. Gatica: *On the mixed finite element method with Lagrange multipliers.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 19, 2, pp. 192-210, (2003)) y establezca un esquema de Galerkin estable para (3).

GNG/gng