UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1, 525402

Análisis Funcional y Aplicaciones II

Martes, 27 de Diciembre de 2011 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ lineal tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Con el objeto de definir el operador adjunto $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$, se introduce el subespacio de Y' dado por

$$\mathcal{D}(A') := \Big\{ G \in Y' : \quad \text{existe } c > 0 \text{ tal que } \quad |G(A(x))| \le c\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

   a) Dado $G \in \mathcal{D}(A')$, defina el funcional $f : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$ por $f(x) := G(A(x))$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, y demuestre que existe un único $F \in X'$ tal que $F|_{\mathcal{D}(A)} = f$.

   b) De acuerdo al análisis en a), defina $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$ por $A'(G) := F$ $\forall\, G \in \mathcal{D}(A')$, y pruebe que A' es lineal y cerrado.

   c) Suponga ahora que A es cerrado, en cuyo caso se sabe que $N(A) = {}^{o}R(A')$, y demuestre que si X es reflexivo entonces $N(A)^{o} = \overline{R(A')}$.

2. a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biyectivo. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

   b) Sean X, Y espacios de Banach separables (reflexivos). Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable (reflexivo).

   c) Dado un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \Big\},$$

   y

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \Big\} \qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega).$$

   Asuma que $L^2(\Omega)$ es separable y demuestre que $H(\mathrm{div};\Omega)$ también lo es.

3. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Pruebe que

$$\Big\{ \overline{\lambda} : \quad \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_r(A) \Big\} \subseteq \boldsymbol{\sigma}_p(A^*).$$

   En particular, considere el espacio $X := L^2(\Omega)$, con $\Omega :=]0,1[$, y demuestre que $\boldsymbol{\sigma}_r(A) = \emptyset$, donde $A : X \to X$ está definido por

$$(A\,u)(t) := \int_0^1 (t^2\, s + s^2\, t)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \in \Omega, \quad \forall\, u \in X.$$

4. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{ x_n^{(1)} \}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que $\{ T x_n^{(1)} \}_{n \in \mathbf{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto.

5. Sea H un Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si $A^* A = A A^*$. Pruebe en este caso que:

   a) $\lambda \in \sigma_p(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. Concluya además que

   $$E_\lambda(A) := N(A - \lambda I) = E_{\bar{\lambda}}(A^*) := N(A^* - \bar{\lambda} I) .$$

   b) Si λ, $\mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A^*)$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PTS.: ELIJA 4 DE ELLOS

GGP/ggp