UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Lunes 9 de Mayo de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $X := C([0,1])$ provisto de la norma $\|u\|_X := \max\Big\{ |u(t)| : \quad t \in [0,1]\Big\}$ $\forall\, u \in X$, y dado $n \in \mathbb{N}$, considere el subconjunto $\Big\{u_1, u_2, \dots, u_n\Big\}$ de X definido por $u_j(t) := t^{j-1} \quad \forall\, t \in [0,1]\,, \quad \forall\, j \in \{1,2,\dots,n\}$. Demuestre que existen un operador $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ y una constante $C_n > 0$, que depende sólo de $\mathrm{P}_{n-1}([0,1])$, el subespacio de polinomios de grado $\le n-1$ definidos sobre $[0,1]$, tales que

$$\|A\| \,\le\, C_n \qquad \text{y} \qquad A(u_j) \,=\, e_j \quad \forall\, j \in \{1,2,\dots,n\}\,,$$

donde $\Big\{e_1, e_2, \dots, e_n\Big\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

2. Sean X e Y espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ para el cual existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|T(x)\| \,\ge\, \alpha\,\|x\| \quad \forall\, x \in X$. Pruebe que para cada $y \in Y$ existe un único $\bar{y} \in R(T)$ tal que $T^*(y) \,=\, T^*(\bar{y})$. Concluya, además, que $\|\bar{y}\| \,=\, \min\limits_{z \in N(T^*)} \|y - z\|\,.$

3. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j \in \{1,2,\dots,N\}$, espacios de Hilbert reales, y para cada $j \in \{1,2,\dots,N\}$ considere un operador $B_j \in \mathcal{L}(H, Q_j)$. A su vez, sea $Q := Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_N$ provisto del producto escalar

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle_Q \,:=\, \sum_{j=1}^{N} \langle p_j, q_j\rangle_j \qquad \forall\, \mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots, p_N),\ \mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_N) \in Q\,,$$

y muestre que $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ es un espacio de Hilbert real. Luego, defina el operador $B : H \to Q$ por $B(\tau) := (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_N(\tau)) \ \ \forall\, \tau \in H$, pruebe que $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y calcule explícitamente el operador adjunto $B^* : Q \to H$. Suponga ahora que los espacios involucrados son Banach y calcule el adjunto $B' : Q' \to H'$.

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.

   a) Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \,\in\, X'$ tales que

   $$F_j(x_i) = \delta_{ij} \qquad \forall\, i, j \,\in\, \{1, ..., n\}\,.$$

   b) Pruebe que $X \,=\, U \,\oplus\, V$, donde $V \,:=\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_n\}$.

5. Dados $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert reales, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas, y $F \in X'$, $G \in Y'$, considere el problema: Hallar $(\sigma, u) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,u) &= F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in X\,, \\ b(\sigma,v) &= G(v) \qquad \forall\, v \in Y\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Pruebe que (1) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $(\sigma, u) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\sigma) + \mathbf{B}^*(u) &= \mathcal{R}_X(F)\,, \\ \mathbf{B}(\sigma) &= \mathcal{R}_Y(G)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X,X)$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(X,Y)$ son los operadores inducidos por a y b, respectivamente, mientras que $\mathcal{R}_X : X' \to X$ y $\mathcal{R}_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz correspondientes. Además, en el caso particular en que X e Y son de dimensiones finitas n y m, respectivamente, concluya que (1) se transforma en un sistema lineal de $n+m$ ecuaciones y $n+m$ incógnitas.

6. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   i) En el caso de un Hilbert, el Teorema de Hahn-Banach es consecuencia del Teorema de Representación de Riesz.

   ii) El anulador de un subconjunto S de un espacio vectorial normado X es ortogonal a S.

   iii) Un subespacio U de un Hilbert H es denso en H si y sólo si $U^\perp$ es el vector nulo.

   iv) El dual H' de un Hilbert H es también un Hilbert.

   v) Dados X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, se tiene que $N(A)$ es cerrado si y sólo si $R(A)$ también lo es.

   vi) Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, se tiene que $R(A')$ es cerrado.

CADA PROBLEMA VALE 1.2 PUNTOS. ELIJA 5 DE ELLOS

GGP/ggp