UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Miércoles 22 de Mayo de 2013 — *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. a) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\bar{B}(\mathbf{0},1) := \Big\{ x \in X : \ \|x\| \le 1 \Big\}$ su bola unitaria cerrada. A su vez, dados $N \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^N)$, y $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$, se define el funcional $(\boldsymbol{\beta} \cdot A) : X \to \mathbb{R}$ por

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot A)(x) \,:=\, \langle \boldsymbol{\beta}, A(x) \rangle_N \quad \forall\, x \in X\,,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^N$. Demuestre que si un vector $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{R}^N$ pertenece a $\overline{A(\bar{B}(\mathbf{0},1))}$, entonces

$$|\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle_N\,| \,\le\, \|\boldsymbol{\beta} \cdot A\|_{X'} \quad \forall\, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N\,.$$

   b) Sean X e Y espacios de Banach para los cuales existe una biyección $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, y sea Z un subespacio de X. Pruebe que todo $g \in Z'$ puede "*extenderse*" a un $G \in Y'$ tal que $\|G\|_{Y'} \cong \|g\|_{Z'}$.

2. Sea X un espacio de Banach real y sea $\mathbf{a}$ una forma bilineal sobre X, esto es, $\mathbf{a} : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que satisface:

   i) $\mathbf{a}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\, \mathbf{a}(x,y) + \beta\, \mathbf{a}(z,y) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X,$

   ii) $\mathbf{a}(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, \mathbf{a}(x,y) + \beta\, \mathbf{a}(x,z) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X.$

   En tal caso se define $\mathbf{A} : X \to X'$ como $\mathbf{A}(x)(y) \,:=\, \mathbf{a}(x,y) \quad \forall\, x,\, y \in X$, el cual se llama OPERADOR LINEAL INDUCIDO POR $\mathbf{a}$. Asuma entonces que existen constantes $M,\, m > 0$ tales que

   iii) $|\mathbf{a}(x,y)| \,\le\, M\, \|x\|\, \|y\| \quad \forall\, x,\, y \in X,$ y

   iv) $\mathbf{a}(x,x) \,\ge\, m\, \|x\|^2 \quad \forall\, x \in X,$

   y demuestre que $\mathbf{A}$ es acotado, inyectivo y de rango $R(\mathbf{A})$ cerrado. Pruebe además que ${}^{\circ}R(\mathbf{A}) = \Big\{\mathbf{0}\Big\}$, defina el operador adjunto $\mathbf{A}' : (X')' \to X'$, y comente bajo qué supuesto adicional sobre el espacio X podrá concluirse, a partir de las hipótesis i) - iv), que $\mathbf{A}$ es biyectivo.

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere una partición $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ de $\Omega \; := \,]0,1[$.

   a) Defina los subespacios de $L^2(\Omega)$ dados por

   $$H_n^1(\Omega) \; := \; \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_{]t_{j-1},t_j[} \; \in \; H^1(]t_{j-1},t_j[) \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\},$$

   y

   $$S_n \; := \; \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_{]t_{j-1},t_j[} \text{ es constante } \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\}.$$

   Entonces, dado $u \in H_n^1(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S_n^\perp$ con respecto al producto escalar

   $$\langle v, w \rangle \; := \; \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} p_j\, v\, w \qquad \forall\, v,\, w \;\in\; H_n^1(\Omega)\,,$$

   donde p_j es el polinomio definido por $p_j(t) \; := \; (t - t_{j-1}) \quad \forall\, t \in]t_{j-1}, t_j[$. Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se reemplaza por

   $$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \; := \; \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\{ p_j\, v\, w + v'\, w' \Big\} \qquad \forall\, v,\, w \;\in\; H_n^1(\Omega)\,?$$

   b) Sea $A : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ el operador lineal definido por

   $$A(u) \; := \; \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\{ t\, u(t) + u'(t) \Big\}\, dt \right)_{\overline{j=1,n}} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

   donde $H^1(\Omega)$ y $\mathbb{R}^n$ se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^n)$, defina explícitamente el operador $A^* : \mathbb{R}^n \to H^1(\Omega)$, y pruebe que $\|A^*\| \;\le\; 2/\sqrt{3}$.

4. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no necesariamente ciertas (a menos que se tenga una hipótesis extra):

   i) La suma de dos operadores cerrados es un operador cerrado.

   ii) Si X es un Hilbert y A, $B \in \mathcal{L}(X)$ son autoadjuntos e inyectivos, entonces $R(A) = R(B)$.

   iii) Si X es un espacio vectorial normado y $A : X \to X'$ es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.

   iv) Si X e Y son Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal cerrado no acotado, entonces $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio cerrado propio de X.

   v) El adjunto de todo operador lineal, acotado y sobreyectivo de un Hilbert X en un Hilbert Y es inyectivo.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS

GGP/ggp