

EVALUACION 1

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Martes 9 de Noviembre de 2010

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con aplicación de Riesz $\mathcal{R} : X' \rightarrow X$.

- a) Demuestre que para todo subconjunto M de X se tiene que

$$\mathcal{R}^{-1}(M^\perp) = \left\{ F \in X' : F(x) = 0 \quad \forall x \in S \right\},$$

donde S es el subespacio cerrado generado por M .

- b) Defina $[\cdot, \cdot] : X' \times X' \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$[F, G] := \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G) \rangle \quad \forall F, G \in X',$$

y pruebe que $(X', [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Hilbert.

2. Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y denote por X'' al dual del dual X' , es decir

$$X'' := \left\{ \mathcal{F} : X' \rightarrow \mathbb{R} : \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \right\}.$$

Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $J(x)(F) := F(x) \quad \forall F \in X'$ es un elemento de X'' , y que la aplicación resultante $J : X \rightarrow X''$ es inyectiva e isométrica. Además, utilice lo estipulado en el Problema 1 b) para probar que si X es un Hilbert entonces J es biyectiva.

3. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ del dominio $\Omega :=]0, 3[$, y defina el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ dado por

$$S := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \text{ y } v|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ es una recta } \forall j \in \{1, 2, 3\} \right\}.$$

- a) Demuestre que $\{e_1, e_2\}$ es una base de S , donde e_j es el único elemento de S tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

- b) Defina explícitamente el proyector ortogonal $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow S^\perp$ con respecto al producto escalar $\langle v, w \rangle := \int_\Omega v' w' \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega)$.

4. Sea S un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado X tal que $\overline{S} \neq X$. Demuestre (DE DOS MANERAS DISTINTAS) que existe $F \in X'$ tal que $\|F\| \neq 0$ y $F(x) = 0 \quad \forall x \in S$.

5. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u v \right\} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \frac{M}{\min \left\{ \beta, \frac{1}{M} \right\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS. ELIJA 4 DE ELLOS

GGP/ggp