UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Miércoles 19 de Mayo de 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

   i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,
   ii) $T_i \cap T_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$, y
   iii) $\bar{\Omega} = \cup\{\bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\}\}$.

   a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

   $$H := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}\,\},$$

   provisto de la norma

   $$\|\boldsymbol{\tau}\| := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H,$$

   y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.
   Indicación: note que la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

   $$-\int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j).$$

   En este caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

   b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq |\Omega|^{1/2}$ y

   $$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) - 1\,)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H.$$

2. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert **complejo**, y sean $u,\ v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \to S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que

   $$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \frac{u+v}{2} + \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w.$$

   Qué sucede cuando H es un Hilbert **real** ? Interprete gráficamente.

3. Sea $\Omega := (0,1)\times(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde
$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega)\,\}$$
y
$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$
Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por
$$S := \{\boldsymbol{\tau} : \ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2)\ \forall\, x := (x_1,x_2) \in \Omega;\ \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}\}\,,$$
y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1x_2, x_1+x_2) \quad \forall\, x := (x_1,x_2) \in \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n,v_n) \geq \tilde{\alpha}\,\|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que
   $$A(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n,v_n) = F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que
   $$\|u - u_n\|_H \leq C\left(\inf_{v_n\in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n)\circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} + \|F\circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H_n'} \right),$$
   donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\, v_n \in H_n$.

5. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un **proyector** si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un **proyector ortogonal** si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.

   a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.

   b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      i) P es un proyector ortogonal.

      ii) $R(P) = N(P)^{\perp}$.

      iii) P es autoadjunto

   c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

6. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\quad -\Delta u = f$ en Ω, $\quad u = 0$ en $\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx - \int_\Omega v \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \tag{1}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{3}$$

De este modo, sumando (1), (2) y (3), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{4}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (4) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Indicación: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que $\quad c\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \le |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$.

7. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\, B)$ $\forall\, A,\, B \in X$.

   a) Demuestre que $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde

   $$X_{\mathtt{sim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = A \,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = -A \,\}\,.$$

   b) Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $\quad c_{ij} = 1 \ \ \forall\, i \ge j \ $ y $\ \ c_{ij} = 0 \ \ \forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS. CONTESTE TODOS LOS QUE DESEE.
SU NOTA SE CALCULARÁ CONSIDERANDO SÓLO LOS 4 CON MAYOR PUNTAJE.

GGP/ggp