UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACION

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539).

Miércoles, 26 de Diciembre de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1.5 PUNTOS) Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, donde Ω es un dominio poligonal de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$, el esquema de Galerkin para la formulación mixta del problema de Poisson respectivo con condiciones de contorno de Neumann, se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, (u_h, \xi_h)) \in H_h \times (Q_h^u \times Q_h^\xi)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_h + \int_\Omega u_h \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h + \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi_h \rangle_\Gamma &= 0\,, \\ \int_\Omega v_h \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h + \langle \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \lambda_h \rangle_\Gamma &= -\int_\Omega f v_h + \langle g, \lambda_h \rangle_\Gamma\,, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}_h, (v_h, \lambda_h)) \in H_h \times (Q_h^u \times Q_h^\xi)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ es la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, y H_h, Q_h^u y Q_h^ξ son subespacios de elementos finitos de $H(\operatorname{div};\Omega)$, $L_0^2(\Omega)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente. En particular, dada una triangularización $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ y un entero $k \geq 0$, defina

$$H_h := \Big\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H(\operatorname{div};\Omega) : \quad \boldsymbol{\tau}_h|_K \in \mathrm{RT}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,,$$

$$Q_h^u := \Big\{ v_h \in L_0^2(\Omega) : \quad v_h|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,,$$

$$\Phi_h := \Big\{ \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma : \quad \boldsymbol{\tau}_h \in H_h \Big\}\,,$$

y suponga que existe una constante $\widetilde{c} > 0$, independiente de h, y un operador lineal $\mathcal{L}_h : \Phi_h \to H_h$, tales que $\|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{\operatorname{div};\Omega} \leq \widetilde{c}\, \|\phi_h\|_{-1/2,\Gamma}\ \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, $\operatorname{div} \mathcal{L}_h(\phi_h) \in P_0(\Omega)\ \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, y $\mathcal{L}_h(\phi_h) \cdot \boldsymbol{\nu} = \phi_h$ en Γ $\forall\, \phi_h \in \Phi_h$. Pruebe en tal caso que las siguientes hipótesis (H.1) y (H.2) son equivalentes:

(H.1) existe $\widetilde{\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\phi_h \in \Phi_h \\ \phi_h \neq 0}} \frac{\langle \phi_h, \lambda_h \rangle_\Gamma}{\|\phi_h\|_{-1/2,\Gamma}} \geq \widetilde{\beta}\, \|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma} \qquad \forall\, \lambda_h \in Q_h^\xi\,.$$

(H.2) existe $\widehat{\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h \in P_0(\Omega)}} \frac{\langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \lambda_h \rangle_\Gamma}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\operatorname{div};\Omega}} \geq \widetilde{\beta}\, \|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma} \qquad \forall\, \lambda_h \in Q_h^\xi\,.$$

Demuestre luego que si se cumple (H.1) o (H.2) entonces (1) verifica las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi discreto.

2. (1.5 PUNTOS) Establezca fundadamente la veracidad o no de las siguientes afirmaciones:

   i) En una formulación mixta típica con formas bilineales a y b, la elipticidad de a en el kernel de b implica la condición inf-sup de a en el kernel de b.

   ii) El Teorema de Babuška-Brezzi discreto es consecuencia sólo del respectivo Teorema de Babuška-Brezzi continuo.

   iii) En una formulación mixta típica con formas bilineales a y b, las condiciones inf-sup continua y discreta de b son equivalentes cuando los espacios involucrados son todos de dimensión finita.

3. (1.5 PUNTOS) Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ e $(Y_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, espacios de Hilbert, y considere el espacio $Y = Y_1 \times Y_2$ provisto del producto escalar

$$\langle z, y\rangle_Y := \langle z_1, y_1\rangle_1 + \langle z_2, y_2\rangle_2 \qquad \forall\, z := (z_1, z_2),\ y = (y_1, y_2) \in Y\,.$$

   Entonces, dados $B_j \in \mathcal{L}(X, Y_j)$, $j \in \{1, 2\}$, defina el operador $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ por $B(x) := (B_1(x), B_2(x)) \quad \forall\, x \in X$. Demuestre que B es sobreyectivo si y sólo si:

   i) B_1 **y** B_2 son sobreyectivos.

   ii) $X = N(B_1) + N(B_2)$.

   Escriba la equivalencia anterior en términos de las formas bilineales acotadas b, b_1 y b_2 inducidas por los operadores B, B_1 y B_2, respectivamente.

4. (1.5 PUNTOS) Sea Ω un dominio anular de $\mathbb{R}^2$ con fronteras interior y exterior, ambas Lipschitz continuas, dadas por Σ y Γ, respectivamente, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El PROBLEMA DE STOKES con condiciones de contorno mixtas consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{en} \quad \Omega\,,\\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en} \quad \Omega\,,\\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en} \quad \Gamma\,,\\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en} \quad \Sigma\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, luego elimine p, y finalmente aplique la Teoría de Babuška -Brezzi para analizar la solubilidad de la formulación variacional mixta resultante.

GGP/ggp