UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE ECUPERACIÓN, 525402

Análisis Funcional y Aplicaciones II

Martes, 6 de Marzo de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea u una forma lineal sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que u es continua (distribución temperada) si y sólo si existen $C > 0$ y un entero no-negativo N tales que

$$|\langle u, \varphi\rangle| \;\leq\; C \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leq N} \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\, x^\alpha\, \partial^\beta \varphi(x)\,| \right\} \qquad \forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

2. Demuestre que para toda $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para todo multiíndice α, y para cada $h \in \mathbb{R}^n$, se tiene

   i) $\widehat{D^\alpha u} \,=\, \xi^\alpha\, \widehat{u}$ ii) $\widehat{x^\alpha u} \,=\, (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha\, \widehat{u}$

   iii) $\widehat{\tau_h u} \,=\, e^{-i\,\xi\cdot h}\, \widehat{u}$ iv) $\widehat{e^{i\,x\cdot h}\, u} \,=\, \tau_h\, \widehat{u}$

   Deduzca, a partir de estas identidades, que $\widehat{D^\alpha\,\delta} \,=\, \xi^\alpha$ y $\widehat{x^\alpha} \,=\, (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha\,\delta$, probando primero que $\widehat{\delta} = 1$.

3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean $x_0,\, x_1 \in \Omega$ tales que $x_0 \neq x_1$. Suponga que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\operatorname{sop} u = \{x_0, x_1\}$.

   i) Demuestre que existen enteros no negativos N_0, N_1, y constantes $c_\alpha\,,\, d_\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq N_0$, $|\beta| \leq N_1$, tales que $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi\rangle \;=\; \sum_{|\alpha|\leq N_0} c_\alpha\, \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi\rangle \;+\; \sum_{|\beta|\leq N_1} d_\beta\, \langle \partial^\beta \delta_{x_1}, \varphi\rangle\,.$$

   ii) Extienda el resultado anterior al caso en que $\operatorname{sop} u \,=\, \{\, x_0, x_1, ..., x_N \,\}$, con $x_i{\neq}x_j$ para todo $i{\neq}j \,\in\, \{1, 2, ..., N\}$.

4. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Utilice que la inyección $i\,:\,H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta para demostrar que la inyección $i\,:\,H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también lo es, para todo entero $m \geq 2$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS

GGP/ggp