UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACIÓN

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Lunes 18 de Julio de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean X e Y espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ para el cual existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\|T(x)\| + \|T^*(y)\| \,\geq\, \alpha \operatorname{dist}\Big((x,y), N(T) \times N(T^*)\Big) \qquad \forall\, (x,y) \in X \times Y\,. \quad (1)$$

   a) Defina el operador lineal $\mathcal{A} : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ por $\mathcal{A}(x,y) := (T(x), T^*(y))$ $\forall\, (x,y) \in X \times Y$, y demuestre que su adjunto $\mathcal{A}^* : Y \times X \longrightarrow X \times Y$ está dado por $\mathcal{A}^*(y,x) := (T^*(y), T(x)) \quad \forall\, (y,x) \in Y \times X$.

   b) Pruebe que para cada $(x,y) \in X \times Y$ existe un único $(\bar{x},\bar{y}) \in R(T^*) \times R(T)$ tal que $T(x) = T(\bar{x})$, $T^*(y) = T^*(\bar{y})$, y

$$\|(\bar{x},\bar{y})\| \,=\, \min_{(z,w)\in N(T)\times N(T^*)} \|(x,y) - (z,w)\|\,.$$

   c) Qué se concluiría en el caso en que, en vez de (1), se tiene que

$$\|T(x)\| + \|T^*(y)\| \,\geq\, \alpha\, \|(x,y)\| \qquad \forall\, (x,y) \in X \times Y\,?$$

   d) Qué se concluiría en a) si se redefine $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A} : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ con $\mathcal{A}(x,y) := (T^*(y), T(x)) \quad \forall\, (x,y) \in X \times Y$?

2. Sean X, Y y Z espacios vectoriales normados y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{A\} \subseteq \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a A, esto es

$$A_n(y) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} A(y) \qquad \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Suponga que existe $M > 0$ tal que $\|A_n\| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, y razone por contradicción para demostrar que

$$\|A_n\, K \,-\, A\, K\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\, K \in \mathcal{K}(X,Y).$$

   b) En vez del supuesto en a) suponga ahora que Y es Banach. Aplique entonces el Teorema de Banach-Steinhaus y obtenga la misma conclusión de a).

   c) Sean $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tales que $B_n'(G) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} B'(G) \quad \forall\, G \in Y'$. Use el hecho que el adjunto de un operador compacto tambien es compacto para demostrar que

$$\|KB_n - KB\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\, K \in \mathcal{K}(Y,Z)\,.$$

3. Sean H y Q espacios de Hilbert reales, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales que verifican las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi Continuo.

   a) Considere el operador $T : H \times Q \to (H \times Q)' \equiv H' \times Q'$ que a cada $(\zeta, w) \in H \times Q$ le asigna $T(\zeta, w) := (F_{\zeta,w}, G_\zeta)$, donde $F_{\zeta,w} : H \to \mathbb{R}$ y $G_\zeta : Q \to \mathbb{R}$ son los funcionales definidos por

   $$F_{\zeta,w}(\tau) := a(\zeta,\tau) + b(\tau,w) \quad \forall\, \tau \in H \quad \text{y} \quad G_\zeta(v) := b(\zeta,v) \quad \forall\, v \in Q\,.$$

   Demuestre que T está bien definido, y luego aplique el Teorema de la Inversa Acotada para deducir la existencia de una constante $C > 0$ tal que, para todo $(\zeta, w) \in H \times Q$ se tiene

   $$C\,\|(\zeta,w)\|_{H\times Q} \le \sup_{\substack{(\tau,v)\in H\times Q\\ (\tau,v)\neq(0,0)}} \frac{|a(\zeta,\tau) + b(\tau,w) + b(\zeta,v)|}{\|(\tau,v)\|_{H\times Q}}\,. \tag{2}$$

   b) Dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, denote por $(\sigma, u) \in H \times Q$ a la única solución de

   $$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,u) &= F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H\,,\\ b(\sigma,v) &= G(v) \qquad \forall\, v \in Q\,, \end{aligned} \tag{3}$$

   y sea $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ una solución de Galerkin asociada, donde H_h y Q_h son subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, que satisfacen las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi discreto. Aplique entonces lo obtenido en a), y deduzca la estimación de error a posteriori

   $$\|(\sigma,u) - (\sigma_h,u_h)\|_{H\times Q} \le c\left\{\|\mathcal{R}_h\|_{H'} + \|\mathcal{S}_h\|_{Q'}\right\},$$

   donde $c > 0$ es independiente de h, y $\mathcal{R}_h \in H'$ y $\mathcal{S}_h \in Q'$ están dados por

   $$\begin{aligned} \mathcal{R}_h(\tau) &:= F(\tau) - a(\sigma_h,\tau) - b(\tau,u_h) \qquad \forall\, \tau \in H\,,\\ \mathcal{S}_h(v) &:= G(v) - b(\sigma_h,v) \qquad \forall\, v \in Q\,. \end{aligned}$$

4. Sean X e Y espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ para el cual existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|T(x)\| \ge \alpha\,\|x\| \quad \forall\, x \in X$. Pruebe que para cada $y \in Y$ existe un único $\bar{y} \in R(T)$ tal que $T^*(y) = T^*(\bar{y})$ y $\|\bar{y}\| = \min_{z\in N(T^*)} \|y-z\|$.

---

cada problema vale 1.5 puntos

GGP/ggp