UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACION
Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Jueves 6 de Enero de 2010 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ del dominio $\Omega :=]0, 3[$, y defina el subespacio de $L^2(\Omega)$ dado por

$$S := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v\,|_{[x_{j-1}, x_j]} \quad \text{es constante} \quad \forall\, j \in \{1, 2, 3\} \Big\}.$$

   a) Demuestre que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de S, donde e_j es el único elemento de S tal que $e_j|_{[x_{i-1}, x_i]} = \delta_{ij}$ para todo i, $j \in \{1, 2, 3\}$.
   b) Defina los proyectores ortogonales $P : L^2(\Omega) \to S$ y $Q : L^2(\Omega) \to S^\perp$ con respecto al producto escalar $\langle v, w\rangle := \int_\Omega x\, v\, w \quad \forall\, v,\, w \in L^2(\Omega)$.

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \le \kappa(x) \le M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando el Lema de Lax-Milgram, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ y para toda constante $\delta \in \big(0, \min\big\{2\,\beta, \frac{2}{n\,M}\big\}\big)$, existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left\{ \kappa\, \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \frac{1}{\kappa}\, u\, v \,-\, \delta \sum_{i=1}^{n} u\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} \,=\, \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{\min\left\{\beta - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{M} - \frac{n\delta}{2}\right\}} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

3. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   i) El adjunto de todo operador lineal, acotado e inyectivo de un Hilbert X en un Hilbert Y es sobreyectivo.
   ii) Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$ es biyectivo.
   iii) Existen operadores acotados que no son compactos.
   iv) Dados X e Y espacios de Hilbert, X de dimensión finita, el rango de todo operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es cerrado.
   v) Existen operadores cerrados que no son acotados.

4. Sea $\Omega :=]0,1[$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X = L^2(\Omega)$ e $Y = \ell_2(\mathbb{R}) := \Big\{ A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \Big\}$, provistos de los productos escalares usuales

$$\langle u, v\rangle_X := \int_0^1 u\, v \qquad \forall\, u,\, v \in X\,,$$

$$\langle A, B\rangle_Y := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k \qquad \forall\, A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,,\ B := \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in Y,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \left\{ \frac{1}{k} \int_0^1 x^k\, u \right\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad \forall\, u \in X\,.$$

i) Demuestre que $\mathcal{A}$ está bien definido y es lineal y acotado, y luego calcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$ y $\overline{R(\mathcal{A}^*)}$.

ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.

iii) Demuestre que $\mathcal{A}$ es compacto.

5. Enuncie el TEOREMA DE BABUŠKA-BREZZI y demuestre que sus hipótesis son también necesarias.

6. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X,X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X,X)$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS. ELIJA 4 DE ELLOS.

GGP/ggp